Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 8 im Wintersementer 2020/21 (am 18.12.20)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

10 G-Räume

10.1 Vorbemerkungen und Definitionen

(i) Unser nächstes Ziel ist der Beweis eines Satzes, der gewisssermaßen den Namen dieser Vorlesung rechtfertigt. Nach unseren bisherigen Kenntnissen, sollte man die Gruppen, die wir hier betrachten, eigentlich

affine algebraische Gruppen

nennen. Warum nennt man sie linear ? Der Grund ist der Satz, welcher besagt, daß jede lineare algebraische Gruppe isomorph ist zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer allgemeinen linearen Gruppe

$$\mathbf{GL}_n.$$

Mit anderen Worten, wir können jede lineare algebraische Gruppe identifizieren mit einer Gruppe von Matrizen, d.h. mit einer Gruppe von linearen Abbildungen. Eine solche Gruppe linear zu nennen, ist naheliegend.

(ii) Zum Beweis haben wir einen Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$$

zu konstruieren für jede lineare algebraische Gruppe G.Wie wir inzwischen wissen, ist das Bild $\varphi(G)$ eines solchen Homomorphismus eine abgeschlossene Untergruppe. Wir haben φ so zu wählen, daß die induzierte Abbildung

$$G \longrightarrow \varphi(G)$$

ein Isomophismus ist.

(iii) Zur Konstruktion von φ wird es sich als nützlich erweisen, lineare Abbildungen eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums,

$$\dim_k V < \infty,$$

zu betrachten anstelle der n×n-Matrizen aus $\mathbf{GL}_n$. Die erste Entscheidung in unserer Konstruktion ist die passende Wahl von V und das wichtigste Objekt, welches uns für die Konstruktion zur Verfügung steht, ist wie immer der Koordinatenring der gegegenen Gruppe G,

$$k[G].$$

Dies ist natürlich ein k-Vektorraum, und es ist nicht schwer, eine Operation von G auf diesem Vektorraum zu finden. Zu Beispiel ist durch

$$G \times k[G] \longrightarrow k[G],\ (g,f) \mapsto (x \mapsto f(xg)),$$

eine Operation definiert.

(iv) Leider ist k[G] im allgemeinen nicht endlich-dimensional. Es ergibt sich die Frage, ob es einen passenden linearen Unterraum

$$V \subseteq k[G]$$

mit endlicher Dimension gibt, der bei der Operation von G in sich abgebildet wird (G-stabil ist). Wir werden sogar sehr viel mehr beweisen:

- Jeder endlich-dimensionale Unterraum von k[G] liegt vollständig in einem G-stabilen Unterraum endlicher Dimension.
- Die induzierte Operation von G auf einem beliebigen endlich-dimensionalen G-stabilen V von k[G] definiert einen Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V) \cong GL_n,$$

wobei der Isomorphismus rechts durch die Wahl einer beliebigen Basis von V zustandekommt.

Der Beweis dieser beiden Aussagen wird unsere erste Aufgabe sein.

(v) Als nächstes haben wir die Frage zu klären. Ob man V auch so wählen kann, daß φ einen Isomorphismus algebraischer Gruppen $G \longrightarrow \varphi(G)$ induziert. Es stellt sich heraus, daß man V lediglich groß genug wählen muß, nämlich so groß, daß die k-Algebra k[G] erzeugt wird von den Elementen von V.

(vi) Ein weiterer wichtiger Aspekt besteht darin, daß die obige Konstruktion eine weitgehende Verallgemeinerung besitzt, die wir im Verlauf dieser Vorlesung immer wieder benötigen werden. Statt einer Operation von G auf sich selbst funktionieren alle wesentlichen Argumente in derselben Weise, wenn man eine Operation von G auf einer algebraischen Varietät X betrachtet, d.h. eine reguläre Abbildung

$$a: G \times X \longrightarrow X,\ (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

welche eine Operation von G auf V definiert, d.h. es gelte

$$g'\bullet(g''\bullet x) = (g'\bullet g'')\bullet x \text{ für } g', g'' \in G \text{ und } x \in X$$

und

$$e\bullet x = x \text{ für } x \in X.$$

In dieser Situation sagt man, X sei eine <u>G-Varietät</u> bezüglich der Operation a oder auch ein <u>G-Raum</u>. Für jedes $x \in X$ heißt die Menge

$$G\bullet x = \{g\bullet x \mid g \in G \text{ und } x \in X\}$$

<u>Orbit</u> von x bezüglich G.

Ein <u>Morphismus von G-Räumen</u> ist eine reguläre Abbildung

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

eines G-Raums X mit Werten in einem G-Raum Y mit

$$\phi(g\bullet x) = g\bullet\phi(x) \text{ für } g \in G \text{ und } x \in X.$$

Man sagt in dieser Situation auch ϕ ist eine <u>äquivariante Abbildung</u> bezüglich G. Ein G-Raum X heißt <u>homogen</u>, wenn die Operation von G transitiv ist, d.h. für je zwei Punkte $x,y \in X$ gibt es ein $g \in G$ mit $y = g\bullet x$.

Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Eine <u>rationale Darstellung</u> von einer linearen algebraischen Gruppe G auf V ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$r: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V).$$

Man sagt dann auch, V sei ein <u>G-Modul</u>.

10.2 Existenz abgeschlossener Orbits

Seien G eine algebraische Gruppe und X eine G-Varietät. Dann gilt:

(i) Für jedes $x \in X$ ist das Orbit $G\bullet x \subseteq X$ offen in seiner Abschließung $\overline{G\bullet x}$.

(ii) Es gibt ein $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß $G\bullet x$ abgeschlossen in X ist.
Beweis. Zu (i). Die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ g \mapsto g\bullet x,$$

ist regulär. Es gibt deshalb eine offene Teilmenge U der Abschließung $\overline{G\bullet x}$ des Bildes, die vollständig im Bild liegt,

$$U \subseteq G\bullet x$$

(nach 1.9.5). Multiplikation von links mit Elementen von G bildet die Menge $G\bullet x$ in sich ab, d.h. es gilt

$$\bigcup_{g\in G} g\bullet U \subseteq G\bullet x. \qquad (1)$$

Die Multiplikation mit einem Element $g \in G$ definiert eine reguläre Abbildung

$$L_g: X \longrightarrow X,\ x \mapsto g\bullet x.$$

Ersetzt man g durch g^{-1}, so erhält man die inverse Abbildung, die ebenfalls regulär ist. die Multiplikation mit g definiert also einen Isomorphismus von Varietäten, und insbesondere einen Homöomorphimus. Als solcher kommutiert L_g mit dem Übergang zur Abschließung. Insbesondere gilt

$$L_g(\overline{G\bullet x}) = g\bullet \overline{G\bullet x} = \overline{g\bullet G\bullet x} = \overline{G\bullet x}.$$

Die Einschränkung von L_g auf $\overline{G\bullet x}$ ist deshalb ein Homöomorphismus $\overline{G\bullet x} \longrightarrow \overline{G\bullet x}$ und bildet offene Mengen von $\overline{G\bullet x}$ in offene Mengen von $\overline{G\bullet x}$ ab. Insbesondere sind mit U auch die Mengen $g\bullet U = L_g(U)$ offen in $\overline{G\bullet x}$. Die Vereinigung auf der linken Seite von (1) ist deshalb offen offen in $\overline{G\bullet x}$. Zum Beweis der Aussage von (i) reicht es zu zeigen, in (1) gilt das Gleichheitszeichen.
Sie $g\in G$. Wir wählen ein Element jedes $y \in U$ ($\subseteq G\bullet x$) und schreiben dieses in der Gestalt

$$y = z\bullet x \text{ mit } z \in G.$$

Dann gilt

$$g\bullet x = g\bullet z^{-1}\bullet y \in (g\bullet z^{-1})\bullet U.$$

Rechts steht eine Menge, die in der Vereinigung auf der linken Seite von (1) liegt. Wir haben gezeigt,
$g\bullet x \in \bigcup_{g\in G} g\bullet U$ für jedes $g \in G$,
d.h. in (1) gilt das Gleichheitszeichen und $G\bullet x$ ist eine offene Teilmenge von $\overline{G\bullet x}$.
Zu (ii). Für jedes $x \in G$ setzen wir

$$S_x := \overline{G\bullet x} - G\bullet x.$$

Wir haben zu zeigen, es gibt ein x mit $S_x = \emptyset$. Nach (i) sind die Teilmengen S_x von X abgeschlossen. Weil X ein noetherscher Raum ist, gibt es in der Menge der S_x ein minimales Element. Sei S_x ein solches minimales Element.
Angenommen S_x ist nicht leer, sagen wir

$$y \in S_x = \overline{G\bullet x} - G\bullet x.$$

Weil je zwei Orbits identisch oder disjunkt sind, gilt

$$G\bullet y \cap G\bullet x = \emptyset. \qquad (2)$$

Nach Wahl von y ist y ein Berührungspunkt von G•x. Die Multiplikation mit Elementen aus G definiert Isomorphismen von X. Für jedes $z \in G$ ist deshalb auch z•y ein Berührungspunkt von z•G•x = G•x, d.h. es gilt $z\cdot y \in \overline{G\cdot x}$. Wir haben gezeigt

$$G\cdot y \subseteq \overline{G\cdot x}.$$

Zusammen mit (2) erhalten wir

$$G\cdot y \subseteq S_x \text{ für jedes } y \in S_x .$$

Weil S_x eine abgeschlossene Teilmenge von G ist, folgt

$$\overline{G\cdot y} \subseteq S_x \text{ für jedes } y \in S_x .$$

Weil G•y eine nicht-leere Teilmenge von $\overline{G\cdot y}$, ist damit

$$S_y = \overline{G\cdot y} - G\cdot y \text{ eine echte Teilmenge von } S_x.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von S_x. Diese Widerpruch zeigt,

$$S_x \text{ ist leer,}$$

d.h.

$$G\cdot x = \overline{G\cdot x}$$

ist abgeschlossen.
QED.

10.3 Lokale Endlichkeit der Operation einer linearen algebraischen Gruppe

Seien G eine lineare algebraischen Gruppen und X affine G-Varietät mit der Operation

$$a: G\times X \longrightarrow X.$$

Wir definieren einen Gruppen-Homomorphismus

$$s: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(k[X]) \subseteq \mathbf{GL}(k[X]),\ g \mapsto s(g),$$

auf G mit Werten in der Gruppe der k-Algebra-Homomorphismen $\mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(k[X])$ von k[X] und damit insbesondere in der Gruppe der k-linearen Automorphismen **GL**(k[X]) von k[X], indem wir setzen[1]

$$(s(g)\cdot f)(x) := f(a(g^{-1},x)).$$

Für jeden endlich-dimensionalen k-Vektorraum V gilt dann:

(i) Es gibt einen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum W von k[X], welcher <u>G-stabil</u> ist bezüglich s und welcher den Raum V enthält,

$$V \subseteq W \subseteq k[X] \text{ und } s(g)(W) \subseteq W \text{ für jedes } g \in G.$$

(ii) Die beiden folgenden Bedingungen sind äquivalent.

1. V ist G-stabil bezüglich s, d.h. $s(g)(V) \subseteq V$ für jedes $g\in G$.
2. $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k k[X]$.

---

[1] Man sieht sofort, Summe und Produkt von zwei Funktionen $f', f'' \in k[X]$ wird bei s(g) in die Summe bzw. das Produkt der Bilder von f' und f'' überführt. Ist $f \in k \subseteq k[X]$ ein konstante Funktion, so gilt dasselbe für deren Bild. Für jedes $g \in G$ ist deshalb s(g) ein k-Algebra-Homomorphismus und insbesondere eine k-lineare Abbildung. Durch direktes Nachrechnen sieht man auch, daß

$$s(g'\cdot g'') = s(g')\cdot s(g'') \text{ für } g', g'' \in G$$

gilt, d.h. s ist ein Gruppen-Homomorphismus. Die Einzelheiten findet man im Vorlesungsskript zum zweiten Kapitel (vgl. den Beweis der Bemerkungen von 2.3.5).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$, $g \mapsto s(g)|_V$, eine rationale Darstellung von G auf V.

Beweis. Zu (i). 1. Schritt. Reduktion auf den Fall $V = k\cdot f$.
Nach Voraussetzung hat der k-Vektorraum V eine endliche Basis. Es reicht zu zeigen, daß es für jeden Basisvektor f einen G-stabilen endlich-dimensionalen Raum W gibt mit $k\cdot f \subseteq W$, denn die Summe der Räume W zu den endlich vielen Basisvektoren f ist dann ein Raum der gesuchten Art.
2. Schritt. Der Fall $V = k\cdot f$.
Die Operation $a: G\times X \longrightarrow X$ induziert einen Homomorphismus von k-Algebren

$$a^*: k[X] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[X],\ \alpha \mapsto \alpha\circ a.$$

Wir schreiben $a^*(f) \in k[G]\otimes_k k[X]$ in der Gestalt

$$a^*(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i\otimes f_i \text{ mit } u_i \in k[G] \text{ und } f_i \in k[X]. \qquad (1)$$

Für jedes $g \in G$ und jedes $x \in X$ gilt dann

$$\begin{aligned}(s(g)\cdot f)(x) &= f(a(g^{-1},x)) && \text{(Definition von s)}\\ &= a^*(f)(g^{-1}, x) && \text{(Definition von a*)}\\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\cdot f_i(x) && \text{(nach (1))}\end{aligned}$$

also

$$s(g)\cdot f = \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\cdot f_i\ .$$

Für jedes $g \in G$ (und fest gewähltes f) liegt $s(g)\cdot f$ im endlich-dimensionalen k-Vektorrau, der von den f_i erzeugt wird. Deshalb ist der von den $s(g)\cdot f$ erzeugte k-Vektorraum

$$W := \sum_{g\in G} k\cdot s(g)\cdot f \text{ endlich-dimensional.}$$

Es reicht zu zeigen, W ist G-stabil. Für $h \in G$ gilt

$$\begin{aligned}s(h)(W) &= s(h)\Big(\sum_{g\in G} k\cdot s(g)\cdot f\Big)\\ &= \sum_{g\in G} k\cdot\ s(h)(s(g)\cdot f) && (s(h)\in GL(k[X]) \text{ ist k-linear})\\ &= \sum_{g\in G} k\cdot(s(h\cdot g)\cdot f) && \text{(s ist ein Gruppen-Homomorphismus)}\\ &= \sum_{g\in G} k\cdot s(g)\cdot f && \text{(G ist eine Gruppe)}\\ &= W.\end{aligned}$$

Zu (ii). $2 \Rightarrow 1$.

Nach Voraussetzung 2 gilt

$$a^*(V) \subseteq k[G]\otimes V.$$

Für jedes $f \in V$ ist damit

$$f\circ a = a^*(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i \text{ mit } u_i \in k[G] \text{ und } f_i \in V, \qquad (2)$$

also für jedes $x \in X$:

$$\begin{aligned} s(g)(f)(x) &= f(a(g^{-1},x)) && \text{(nach Definition von s)} \\ &= a^*(f)(g^{-1}, x) && \text{(nach Definition von a*)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\bullet f_i(x) && \text{(wegen (2))} \end{aligned}$$

also für jedes $g \in G$:

$$s(g)(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\bullet f_i \in V,$$

also

$$s(g)(V) \subseteq V.$$

<u>Zu (ii)</u>. <u>1 ⇒ 2</u>.
Sei

$\{f_1,...,f_r\}$ eine k-Vektorraumbasis von $V \subseteq k[X]$.

Wir ergänzen diese Basis zu einer k-Vektorraumbasis von k[X], sagen wir

$\{f_1,...,f_r\} \cup \{g_j\}_{j\in J}$ ist eine k-Vektorraumbasis von V.

Diese Basis definiert dann eine Zerlegung von k[X] in eine direkte Summe

$$k[X] = V \oplus \sum_{j\in J} k\bullet g_j$$

Für $f \in V$ schreiben wir

$$a^*(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes f_i + \sum_{j\in J} v_j \otimes g_j \text{ mit } u_i, v_j \in k[G]. \qquad (3)$$

Dann gilt für jedes $x \in X$:

$$\begin{aligned} s(g)(f)(x) &= f(a(g^{-1},x)) && \text{(nach Definition von s)} \\ &= a^*(f)(g^{-1}, x) && \text{(nach Definition von a*)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\bullet f_i(x) + \sum_{j\in J} v_j(g^{-1})\bullet g_j(x) && \text{(wegen (3))} \end{aligned}$$

also

$$s(g)(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i(g^{-1})\bullet f_i + \sum_{j\in J} v_j(g^{-1})\bullet g_j.$$

Weil s(g)(f) nach Voraussetzung 1 im direkten Summanden V von k[X] liegt, folgt

$v_j(g^{-1}) = 0$ für jedes $j \in J$ und jedes $g \in G$, d.h. die Funktionen $v_j \in k[G]$ sind Null. Es folgt

$$a^*(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes f_i .$$

Weil die f_i eine Basis von V bilden und die u_i in k[G] liegen, folgt

$$a^*(f) \in k[G] \otimes_k V.$$

Da dies für jedes $f \in V$ gilt, ist Bedingung 2 erfüllt.

Beweis der Aussage des zweiten Teils von (ii).

Die Abbildung

$$s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V),\ g \mapsto s(g)|_V ,$$

ist wohldefiniert und eine rationale Darstellung von G in V (d.h. ein Homomorphismus algebraischer Gruppen) falls $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$ gilt.

Sei eine Basis des k-Vektorraums V gegeben, sagen wir

$$V = \sum_{i=1}^{t} k \bullet f_i \quad (\subseteq k[X])$$

Wegen $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$ gibt es eindeutig bestimmte $m_{ij} \in k[G]$ mit

$$a^*(f_i) = \sum_{\alpha=1}^{t} m_{\alpha i} \otimes f_\alpha \quad \text{für } i = 1,\dots, t, \tag{4}$$

also

$$\begin{aligned}
(s(g)(f_i))(x) &= (f_i \circ a)(g^{-1}, x) && \text{(nach Definition von s)}\\
&= a^*(f_i)(g^{-1}, x) && \text{(nach Definition von a*)}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{t} m_{\alpha i}(g^{-1}) \bullet f_\alpha(x) && \text{(nach (4))}
\end{aligned}$$

also

$$s(g)(f_i) = \sum_{\alpha=1}^{t} m_{\alpha i}(g^{-1}) \bullet f_\alpha$$

Bezüglich der Basis der f_i von V hat damit die Abbildung

$$s(g)|_V : V \longrightarrow V$$

die Matrix $(m_{ij}(g^{-1}))$. Wegen $m_{ij} \in k[G]$ sind die Einträge der Matrix reguläre Funktionen auf G. Deshalb ist die Abbildung

$$s_V: G \longrightarrow \mathrm{End}_k(V) \ (\cong \mathbf{M}_t \cong \mathbb{A}^{t^2})$$

ein Morphismus von affinen Varietäten. Weil das Bild des Gruppen-Homomorphismus s in $\mathbf{GL}(k[X])$ liegt, also aus bijektiven k-linearen Abbildungen besteht, ist die Einschränkung

$$s_V(g): V \longrightarrow V$$

von s(g) auf den k-linearen Unterraum V von k[X] injektiv, also sogar bijektiv (wegen $\dim V < \infty$), also ein k-linearer Isomorphismus. Die Werte von s_V liegen in $\mathbf{GL}(V)$ und

$$s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

selbst ist ein Homomorphismus algebraischer Gruppen (eine rationale Darstellung) **QED**.

Index

Inhalt